УДК 517.54

Полнота пространства сепарабельных мер в метрике Канторовича-Рубинштейна.

Кравченко А.С.

Аннотация

В работе рассматривается пространство сепарабельных мер $M(X)$, определённых на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ метрического пространства X. Пространство $M(X)$ метризуется расстоянием Канторовича-Рубинштейна, также называемым в [1] «расстоянием Хатчинсона». Доказывается теорема о том, что пространство $M(X)$ полно в том и только том случае, если полно пространство X. Рассмотрены приложения этой теоремы в теории самоподобных фракталов.

Ключевые слова: фракталы, самоподобные множества, инвариантные меры, сепарабельные меры, метрика Канторовича-Рубинштейна, расстояние Хатчинсона.

1. Введение. В работе [3] Дж. Хатчинсон, вводя понятие инвариантной меры для конечной системы сжимающих подобий, рассматривает метрическое пространство (X,ρ) и пространство $M_{\text{loc}}(X)$ мер ν на X с ограниченным носителем, нормированных условием $\nu(X)=1$, в котором вводится метрика [3, 4.3.(1)]:

$$H(\nu,\mu)=\sup\left|\int_X f\,d\nu-\int_X f\,d\mu\right|, \tag{1}$$

где супремум берётся по всем функциям f из пространства

$$\operatorname{lip}_1(X)=\{f:X\to\mathbb{R}:\ |f(x)-f(y)|\leqslant\rho(x,y),\ \text{для всех } x,y\in X\}.$$

Эта метрика, названная в [1] «расстоянием Хатчинсона», была введена в 50-х годах в работах Л.В.Канторовича и Г.Ш. Рубинштейна (см. [7, Гл.4, §4]).

При доказательстве теоремы [3, 4.4(1)] о существовании инвариантной меры на самоподобном множестве, в статье [3] используется теорема Банаха о неподвижной точке, но отсутствует доказательство полноты рассматриваемого пространства мер $M_{\text{loc}}(X)$. В случае компактного X пространство $M_{\text{loc}}(X)$ является компактным (см. [7, Гл.8, §4]) и, следовательно, полным. Однако, в общем случае справедливо

Утверждение. *Если пространство X неограничено, то пространство $M_{\text{loc}}(X)$ не полно.*

Действительно, выбрав последовательность точек $x_k\in X$, для которой $\rho(x_0,x_k)\leqslant k$ и $\rho(x_0,x_k)\to\infty$ при $k\to\infty$ и, используя меру

Дирака δ_x (см. §2), можем определить последовательность мер $\nu_n = 2^{-n}\delta_{x_0} + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\delta_{x_k}$, фундаментальную в $M_{\mathrm{loc}}(X)$, но не имеющую предела в этом пространстве.

Пробел в доказательстве теоремы Хатчинсона был отмечен в [1], где для случая $X = \mathbb{R}^n$ было дано новое доказательство этой теоремы с использованием пространства $M(X)$ мер ν, удовлетворяющих условиям $\nu(X) = 1$ и $\int_X \rho(x_0, x)\, d\nu < \infty$ для некоторой точки $x_0 \in X$, наделённого метрикой (1). Там же была установлена полнота пространства $M(X)$, для частного случая $X = \mathbb{R}^n$. В §4 мы доказываем основной результат (теорема 4.2) об эквивалентности свойств полноты пространства $M(X)$ и полноты пространства X в общем случае. Приложение этой теоремы к самоподобным фракталам (§5) не только полностью снимает вопрос о корректности теоремы Хатчинсона в общем случае, но и распространяет её на случай счётных систем сжимающих отображений. Это позволяет рассматривать аттрактор (счётной) системы сжимающих подобий в банаховом пространстве как носитель инвариантной меры, без априорного требования его компактности.

2. Основные понятия. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $C_b(X)$ — пространство всех непрерывных ограниченных функций $f : X \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$. При этом число

$$\mathrm{Lip}\, f = \sup\{|\frac{f(x) - f(y)}{\rho(x, y)}| : x \neq y\ x, y \in X\}.$$

называем *константой липшицевости* функции f, и если оно конечно, то функцию f называем *липшицевой*. Пространства всех вещественных липшицевых функций, ограниченных липшицевых функций, и функций с константой липшицевости $< \alpha$ на X обозначаются соответственно $\mathrm{lip}\,(X)$, $\mathrm{lip}^{\circ}(X)$ и $\mathrm{lip}_{\alpha}(X)$. Символ $\mathrm{diam}\,(A)$ обозначает диаметр множества $A \subset X$, т. е. число $\sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\} \in [0, +\infty]$; расстояние от точки $x \in X$ до множества A обозначается $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$. Носителем вещественной функции $f : X \to [0, +\infty)$ называется множество $\mathrm{spt}\, f = \{x \in X : f(x) > 0\}$.

Будем писать $\alpha_n \downarrow \alpha_0$ (или $\alpha_n \uparrow \alpha_0$) для монотонно убывающей (соответственно возрастающей) числовой последовательности $\{\alpha_n\}$, сходящейся к α_0. Аналогично будем писать $f_n \downarrow f_0$ (или $f_n \uparrow f_0$) на множестве X, если последовательность вещественных функций $\{f_n\}$, определённых на X, убывает (соответственно возрастает) и поточечно сходится к функции f_0 всюду на X.

Под *мерой* ν на X мы понимаем вещественную неотрицательную счётно-аддитивную функцию множества, заданную на σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ всех борелевских подмножеств пространства X и удовлетворяющую равенству $\nu(\varnothing) = 0$. Меру $\delta_x(A) = \{1 \text{ при } x \in A;\ 0 \text{ при } x \notin A\}$ называем *ме-*

рой Дирака в точке $x \in X$ (см. [10, 10.9.4(1)]). Мера μ на X, удовлетворяющая условию $\mu(X) < +\infty$, называется конечной. *Носитель* меры μ есть множество $\operatorname{spt}\mu = X \setminus \cup\{A \subset X : A$ открыто и $\mu(A) = 0\}$. Множество $A \subset X$ называется *сепарабельным*, если оно содержится в замыкании своего не более чем счётного подмножества. Следуя [6, Гл.1,§1.], мы называем меру μ *сепарабельной*, если существует борелевское сепарабельное множество $A \subset X$ такое, что $\mu(X \setminus A) = 0$. Известно [2, 2.2.16], что носитель конечной меры всегда является сепарабельным множеством и поэтому для конечных мер условие $\mu(X \setminus \operatorname{spt}\mu) = 0$ равносильно сепарабельности меры μ.

Семейство конечных мер Π называется *плотным* (см. [6, Гл.1,§1.]), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое компактное множество K, что $\nu(X \setminus K) < \varepsilon$ для всех мер $\nu \in \Pi$, и, соответственно, конечная мера называется *плотной*, если плотно семейство, состоящее только из этой меры. Конечная плотная мера однозначно определяется значениями интеграла на функциях $f \in \operatorname{lip}^{\circ}(X)$ (см. [6, Гл.1,§1, Теорема 1.3.]). Отметим, что в полном метрическом пространстве X свойства плотности и сепарабельности меры эквивалентны (см. [6, Добавление III]). Мы будем рассматривать только сепарабельные меры, не касаясь так называемой проблемы меры (см. [6, Добавление III] или [2, 2.1.6]). Каждая конечная мера на X порождает линейный функционал $\mu(f) = \int_X f\,d\mu$ на пространстве $E(X,\mu)$ всех вещественных μ-суммируемых функций. Для метрического пространства X мы, следуя [1, стр. 159], рассматриваем пространство $M(X)$ всех сепарабельных мер μ таких, что $\mu(X) = 1$ и $\mu(f) < +\infty$ для любой функции $f \in \operatorname{lip}(X)$. Заметим, что в общем случае $M_{loc}(X) \subset \mathcal{M}(X)$, где $\mathcal{M}(X)$ — пространство мер, введённое в [1, стр. 160] без требования их сепарабельности. И, кроме того, $M(X) \subset \mathcal{M}(X)$. Каждой точке $a \in X$ сопоставляется функция $\phi_a(x) = \rho(a,x)$, принадлежащая пространству $\operatorname{lip}(X)$.

Утверждение 2.1. *Сепарабельная мера μ на метрическом пространстве (X,ρ), удовлетворяющая условию $\mu(X) = 1$, принадлежит пространству $M(X)$ тогда и только тогда, когда существует точка $a \in X$ такая, что $\mu(\phi_a) < +\infty$.*

`Доказательство.` Если $\mu \in M(X)$, то $\phi_a \in \operatorname{lip}(X)$ для любой точки $a \in X$ и, следовательно, $\mu(\phi_a) < +\infty$. Если имеется точка $a \in X$ такая, что $\mu(\phi_a) < +\infty$, то для любой функции $f \in \operatorname{lip}(X)$ выполняется оценка $f(x) \leqslant f(a) + (\operatorname{Lip} f) \cdot \rho(a,x) = f(a) + (\operatorname{Lip} f) \cdot \phi_a(x)$, из которой следует требуемая оценка для интеграла: $\mu(f) \leqslant f(a) + (\operatorname{Lip} f) \cdot \mu(\phi_a) < +\infty$. $\square$

3. Метризация пространства мер. Расстояние $H(\mu,\nu)$ между мерами μ,ν определяется формулой (1), где супремум берётся по всем функциям $f \in \mathrm{lip}_1(X)$, и является ограничением на $M(X)$ метрики $H(\mu,\nu)$, рассмотренной в [1] на формально более широком пространстве $\mathcal{M}(X)$. Заметим, что при проверке аксиом метрики для $H(\mu,\nu)$ в [1, Теорема 1, стр 161] свойство полноты метрического пространства X не использовалось. Мы говорим, что последовательность конечных мер μ_k слабо сходится к конечной мере μ, если $\mu_k(f) \to \mu(f)$ при $k \to \infty$ для любой функции $f \in C_b(X)$, и в этом случае мы пишем $\mu_k \Rightarrow \mu$. Семейство множеств вида $\{\mu \in M(X) : |\mu(f_j) - \nu(f_j) < \varepsilon; j = 1, \ldots, k\}$ при произвольных $\varepsilon > 0$ и любых конечных наборах $f_1, \ldots, f_k$ функций из $C_b(X)$ задаёт систему базисных окрестностей для каждой точки $\nu \in M(X)$, порождающую топологию *слабой сходимости*, которую мы будем обозначать через $\mathcal{W}$.

Последовательность мер $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *слабо фундаментальной*, если для любой функции $f \in C_b(X)$ фундаментальна последовательность $\nu_n(f)$. Множество мер Π называется *слабо полным*, если любая слабо фундаментальная последовательность мер $\{\nu_n\}$ из этого множества слабо сходится к некоторой мере из Π.

Теорема 3.1. *Для любого метрического пространства X топология $\mathcal{T}$ в пространстве мер $M(X)$, порождённая метрикой $H(\mu,\nu)$, совпадает с топологией слабой сходимости $\mathcal{W}$ тогда и только тогда, когда* $\mathrm{diam}\, X < \infty$. *При этом, если* $\mathrm{diam}\,(X) = \infty$, *то топология $\mathcal{T}$ строго сильнее топологии $\mathcal{W}$.*

Доказательству этой теоремы предпошлём несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.2. *Для любой функции $f \in C_b(X)$ существует последовательность $\{\varphi_n\}$ функций из* $\mathrm{lip}^\circ(X)$, *такая что $\varphi_n \downarrow f$ на X.*

`Доказательство.` Пусть $f \in C_b(X)$ и $||f||_\infty = m < +\infty$. Для $n = 1, 2, \ldots$ каждая из непрерывных функций $\varphi_n(x) = \sup\{f(t) - n \cdot \rho(x,t) : t \in X\}$ ограничена на X, т. к. $-m \leqslant f(x) \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \sup\{f(t) : t \in X\} = m$. Из неравенства $(f(t) - n \cdot \rho(x_1,t)) - n \cdot \rho(x_1,x_2) \leqslant f(t) - n \cdot \rho(x_2,t) \leqslant \varphi_n(x_2)$ следует, что $\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2) \leqslant n \cdot \rho(x_1,x_2)$ при любых $x_1, x_2 \in X$. Следовательно, $\mathrm{Lip}\,\varphi_n \leqslant n$ и $\varphi_n \in \mathrm{lip}^\circ(X)$. Неравенство $\varphi_{n+1}(x) \leqslant \varphi_n(x)$ вытекает непосредственно из определения функций $\varphi_n(x)$. При любом фиксированном $x \in X$ для произвольного $\varepsilon > 0$ имеется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$, как только $\rho(x,t) < \delta$. Т. к. при любом $n > 2m/\delta$ и $\rho(x,t) \geqslant \delta$ выполняется неравенство $(f(t) - f(x)) - n \cdot \rho(x,t) \leqslant 0$, то оценка $0 \leqslant \varphi_n(x) - f(x) = \sup\{(f(t) - f(x)) - n \cdot \rho(x,t) : \rho(x,t) < \delta\} \leqslant \varepsilon$ выполняется при всех достаточно больших n. Следовательно, $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$. $\square$

`Замечание.` Аналогичное утверждение для полунепрерывных функций на ограниченных множествах в $\mathbb{R}^n$ было доказано Хаусдорфом (1919), см. [5, Theorem II.5].

Пусть V — векторная решётка. Линейный функционал $F : V \to \mathbb{R}$ называется *секвенциально o-непрерывным* или *секвенциально порядково непрерывным*, если для любой монотонно убывающей последовательности u_n элементов V такой, что $\inf u_n = 0$, выполняется $F(u_n) \to 0$, при $n \to \infty$. Примером секвенциально o-непрерывного функционала является интеграл по произвольной конечной мере μ на X.

Лемма 3.3. *Пусть V — векторная решётка, и V_0 такое подмножество V, что для любого элемента $v \in V$ найдётся убывающая последовательность элементов $u_k \in V_0$, $k = 1, 2, \ldots$, такая что $\inf u_k = v$. Если последовательность линейных секвенциально o-непрерывных положительных функционалов $F_n : V \to \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$ поточечно сходится к F_0 на множестве V_0, то последовательность $\{F_n\}$ поточечно сходится к F_0 и на всём V.*

`Доказательство.` Выберем произвольный элемент $v \in V$ и произвольное $\varepsilon > 0$. По условию, найдётся убывающая последовательность элементов $u_k \in V_0$, удовлетворяющая $\inf u_k = v$. Выберем $k = k(\varepsilon)$, такое что $|F(u_k) - F(v)| < \varepsilon$. Выберем $N = N(\varepsilon)$, такое что для $n > N$ выполняется $|F_n(u_k) - F(u_k)| < \varepsilon$. Тогда

$$F_n(v) \leqslant F_n(u_k) < F(u_k) + \varepsilon < F(v) + 2\varepsilon.$$

Переходя к $\limsup$ при $n \to \infty$, получим $\limsup F_n(v) \leqslant F(v) + 2\varepsilon$. В силу произвольности выбора ε, $\limsup F_n(v) \leqslant F(v)$. Применив аналогичные рассуждения для элемента $(-v)$ получим $\liminf F_n(v) \geqslant F(v)$, откуда следует $\lim F_n(v) = F(v)$. □

Следствие 3.4. *Пусть последовательность конечных мер $\{\mu_n\}$ и конечная мера μ таковы, что для любой функции $f \in \mathrm{lip}^\circ(X)$ выполняется $\mu_n(f) \to \mu(f)$, тогда $\mu_n \Rightarrow \mu$.*

`Доказательство.` Положим $V = C_b(X)$ и $V_0 = \mathrm{lip}^\circ(X) \subset V$. Тогда искомое утверждение непосредственно следует из лемм 3.2 и 3.3. □

Следствие 3.5. *Топология $\mathcal{T}$ порождаемая метрикой H в пространстве $M(X)$ не слабее топологии $\mathcal{W}$.*

`Доказательство.` Из следствия 3.4 вытекает, что любая сходящаяся в метрике H последовательность мер из $M(X)$ сходится в слабой топологии. □

Лемма 3.6. *Если пространство X ограничено, то любая слабо сходящаяся последовательность мер из $M(X)$ сходится в метрике H.*

`Доказательство.` Пусть X ограничено. Рассмотрим произвольную слабо сходящуюся последовательность сепарабельных мер $\nu_n \Rightarrow \nu_0$ ($n = 1, 2, \dots$).

Пусть $\tilde{X}$ — пополнение множества X. Семейство множеств $\mathcal{D} = \{A \subset \tilde{X} : A \cap X \in \mathcal{B}(X)\}$ является σ-алгеброй, что непосредственно следует из того, что семейство борелевских множеств $\mathcal{B}(X)$ является σ-алгеброй. Если множество V открыто в $\tilde{X}$, то $V \cap X$ открыто в X, следовательно, $V \cap X \in \mathcal{B}(X)$ и $V \in \mathcal{D}$. Т. к. $\mathcal{B}(\tilde{X})$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые в $\tilde{X}$ множества, то $\mathcal{B}(\tilde{X}) \subset \mathcal{D}$, или, иными словами, $\{A \cap X : A \in \mathcal{B}(\tilde{X})\} \subseteq \mathcal{B}(X)$. Таким образом, каждая сепарабельная мера $\nu_n : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty)$ порождает сепарабельную меру $\tilde{\nu}_n : \mathcal{B}(\tilde{X}) \to [0, +\infty)$, определяемую формулой $\tilde{\nu}_n(A) = \nu_n(A \cap X)$ (все необходимые свойства $\tilde{\nu}_n$ непосредственно вытекают из аналогичных свойств меры ν).

Для любой функции $f \in C_b(\tilde{X})$ имеем

$$\tilde{\nu}_n(f) = \nu_n(f|_X) \to \nu_0(f|_X) = \tilde{\nu}_0(f),$$

т. е. $\tilde{\nu}_n \Rightarrow \tilde{\nu}_0$. Следовательно, семейство $\Pi = \{\tilde{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty}$ является компактным в топологии слабой сходимости. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По обратной теореме Прохорова [6, Гл 1. §6,Теорема 6.2], семейство Π является плотным, т. е. найдётся компактное множество $K \subset \tilde{X}$ такое, что $\tilde{\nu}_n(\tilde{X} \setminus K) < \varepsilon$ для $n = 0, 1, \dots$.

Т. к. множество X всюду плотно в $\tilde{X}$, то множество шаров $B(x, \varepsilon)$ диаметра ε с центрами $x \in X$ покрывает $\tilde{X}$, и, в частности, компакт K. Выберем конечное подпокрытие K: $\cup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon) \supset K$ и обозначим $A = \{x_i\}_{i=1}^{m}$. Т. к. множество A конечно, то множество функций

$$\mathcal{F} = \{\varphi \in \operatorname{lip}_1(A) : \varphi(x_1) = 0\}$$

гомеоморфно замкнутому ограниченному подмножеству $\mathbb{R}^m$, и, следовательно, $\mathcal{F}$ компактно в равномерной норме $\|\varphi\|_\infty = \max|\varphi|$. Выберем в $\mathcal{F}$ конечную ε-сеть $\varphi_k \in \mathcal{F}$. Рассмотрим набор функций $\psi_k : X \to \mathbb{R}$

$$\psi_k(x) = \min\{\varphi_k(x_i) + \rho(x, x_i) : i = 1, \dots, m\}.$$

Каждая такая функция является продолжением φ_k на всё пространство X $\psi_k|_A \equiv \varphi_k$, и $\psi_k \in \operatorname{lip}_1(X)$ по построению.

Выберем настолько большой номер n_0, что $|\nu_n(\psi_k) - \nu_0(\psi_k)| < \varepsilon$ для всех k и всех $n \geqslant n_0$. Пусть $f \in \operatorname{lip}_1(X)$ — произвольная липшицева функция. Тогда функция $g(x) = f(x) - f(x_1)$ такова, что $g|_A \in \mathcal{F}$ и, значит, найдётся k со свойством $\max\{|g(x_i) - \varphi_k(x_i)| : i = 1, \dots, m\} < \varepsilon$.

Для любой точки $x \in K \cap X$ найдётся точка x_i, такая что $\rho(x_i, x) \leqslant \varepsilon$ и тогда

$$|g(x) - \psi_k(x)| \leqslant |g(x) - g(x_i)| + |g(x_i) - \psi_k(x_i)| + |\psi_k(x_i) - \psi_k(x)| < 3\varepsilon$$

Таким образом, $\max\{|g(x) - \psi_k(x)| : x \in K \cap X\} \leqslant 3\varepsilon$. Собирая воедино полученные оценки, для $n \geqslant n_0$ имеем:

$$|\nu_n(f)-\nu_0(f)| = |\nu_n(g)-\nu_0(g)| \leqslant \left|\int_{X\cap K} g\, d(\nu_n-\nu_0)\right| + \left|\int_{X\setminus K} g\, d(\nu_n-\nu_0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\nu_n(\psi_k)-\nu_0(\psi_k)| + 2 \max_{x\in X\cap K} |g(x)-\psi_k(x)| + \max|g| \cdot |\nu_n(X\setminus K)+\nu_0(X\setminus K)| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + 6\varepsilon + 2\varepsilon \cdot \max|g| \leqslant \varepsilon \cdot (7 + 2\operatorname{diam} X)$$

Переходя к верхней грани по функциям $f \in \operatorname{lip}_1(X)$, получаем оценку

$$H(\nu_n, \nu_0) \leqslant \varepsilon \cdot (7 + 2\operatorname{diam} X).$$

В силу произвольности выбора ε это доказывает сходимость последовательности $\{\nu_n\}$ к ν_0 в метрике H. $\square$

Лемма 3.7. *Если пространство X неограничено, то топология метрики H на $M(X)$ не эквивалентна (строго сильнее) слабой топологии.*

`Доказательство.` Пусть X неограничено. Выберем последовательность точек $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ такую, что $\rho(x_0, x_n) \geqslant n^2$. Пусть $\nu_n = \frac{1}{n} \cdot \delta_{x_n} + (1 - \frac{1}{n}) \cdot \delta_{x_0}$, тогда $\nu_n \Rightarrow \delta_{x_0}$. В самом деле, для любой непрерывной ограниченой функции f имеем

$$|\delta_{x_0}(f) - \nu_n(f)| = \frac{1}{n} \cdot |f(x_0) - f(x_n)| \leqslant \frac{1}{n} \cdot 2\max|f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

С другой стороны,

$$H(\delta_{x_0}, \nu_n) = \nu_n(\phi_{x_0}) = \frac{1}{n} \cdot \rho(x_0, x_n) \geqslant n$$

и, стало быть, в метрике H сходимости нет. $\square$

Теорема 3.1 является непосредственным следствием утверждений 3.5–3.7.

4. Основные теоремы о полноте пространства мер. В данном параграфе мы докажем две следующие теоремы.

Теорема 4.1. *Если пространство X полно, то пространство конечных сепарабельных мер на X слабо полно.*

Теорема 4.2. *Пространство $M(X)$ полно в метрике H тогда и только тогда, когда полно пространство X.*

Сначала приведём несколько технических лемм. Следущая лемма встречается в [6, Гл.1,§6] как часть доказательства обратного утверждения теоремы Прохорова.

Лемма 4.3. *В полном пространстве семейство мер Π плотно тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется конечный набор шаров $\{B_i\}$ радиуса ε такой, что $\nu(X \setminus \cup B_i) < \delta$ для всех мер $\nu \in \Pi$.*

`Доказательство.` В прямую сторону непосредственно следует из определения плотного семейства и вполне ограниченности любого компактного множества. В обратную, пусть $U_k = \cup_i B_{ik}$ — объединение конечного набора шаров радиуса $\frac{1}{2^k}$ и $\nu(X \setminus U_k) < \frac{\delta}{2^k}$. Тогда пересечение множеств U_k вполне ограничено, по построению. Значит, его замыкание $K = \mathrm{cl} \cap_k U_k$ по теореме Хаусдорфа [10, 4.6.7.] компактно, и, кроме того, $\nu(X \setminus K) < \delta$. $\square$

Следствие 4.4. *Если последовательность сепарабельных мер $\{\nu_k\}$ не является плотной, то существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что для любого конечного набора шаров $\{B_i\}$ радиуса ε и любого $n_0 \geqslant 0$ найдётся натуральное число $n > n_0$ такое, что $\nu_n(X \setminus \cup B_i) \geqslant \delta$.*

`Доказательство.` Пусть последовательность сепарабельных мер $\Pi = \{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ не плотна и пусть $n_0 > 0$. Из определения плотного семейства мер вытекает, что объединение конечного числа плотных семейств плотно. Следовательно, семейство $\Pi' = \{\nu_k : k \leqslant n_0\}$ плотно, а семейство $\Pi'' = \{\nu_k : k > n_0\}$ не является плотным, в силу $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$. Из леммы 4.3. следует, что найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что для любого конечного набора шаров $\{B_i\}$ радиуса ε найдётся мера $\nu_n \in \Pi''$ $(n > n_0)$ такая, что $\nu_n(X \setminus \cup B_i) \geqslant \delta$. $\square$

Лемма 4.5. *Пусть пространство X — полно. Если последовательность конечных сепарабельных мер $\{\nu_n\}$ такова, что для любой функции $f \in \mathrm{lip}^\circ(X)$ последовательность $\nu_n(f)$ фундаментальна, то $\{\nu_n\}$ составляет плотное семейство. Как следствие, любая слабо фундаментальная последовательность сепарабельных мер составляет плотное семейство.*

`Доказательство.` Пусть последовательность $\{\nu_n\}$ не плотна. Покажем, что найдётся такая функция $f \in \mathrm{lip}^\circ(X)$, что последовательность $\nu_n(f)$ не фундаментальна. Обозначим $B(x, r) = \{t \in X : \rho(t, x) \leqslant r\}$ — замкнутый шар с центром в точке $x \in X$, и радиуса $r > 0$. Для любого конечного множества A и $r > 0$ будем обозначать $A^r = \cup_{x \in A} B(x, r)$. Из следствия 4.4 вытекает, что существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, такие что для любого конечного множества $A \subset X$ и любого $n_0 \geqslant 0$ найдётся натуральное число $n > n_0$ такое, что $\nu_n(X \setminus A^\varepsilon) \geqslant \delta$.

Построим последовательность натуральных чисел $1 \leqslant n_1 < n_2 < \dots$ и последовательности $\{A_k\}$ и $\{D_k\}$ конечных подмножеств пространства X, такие что выполняются следующие свойства:

(i) $\quad A_{i-1} \subset A_i$, для всех $i > 1$

(ii) $\quad D_i \subset A_j$, при $i \leqslant j$

(iii) $\quad D_i^{\varepsilon/2} \cap A_j^{\varepsilon/2} = \emptyset$, при $i > j$

(iv) $\quad \nu_{n_k}(D_k^{\varepsilon/4}) > \delta/2$

(v) $\quad \nu_{n_k}(X \setminus A_k^{\varepsilon/2}) < \delta/32$

Будем действовать по следующему алгоритму.

Шаг 1. Из выбора ε и δ видно, что найдётся номер n_1 такой, что $\nu_{n_1}(X) \geqslant \delta$. В силу сепарабельности меры ν_{n_1}, найдётся конечное множество A_1, такое что $\nu_{n_1}(X \setminus A_1^{\varepsilon/4}) < \delta/32$. Свойство (v) для $k = 1$ следует из включения $A_1^{\varepsilon/4} \subset A_1^{\varepsilon/2}$ и монотонности меры ν_{n_1}. Положим $D_1 = A_1$, тогда выполнено (ii) для $i = j = 1$ и $\nu_{n_1}(D_1^{\varepsilon/4}) = \nu_{n_1}(X) - \nu_{n_1}(X \setminus A_1^{\varepsilon/4}) > \delta - \delta/32 > \delta/2$, что в точности даёт (iv), для $k = 1$.

Шаг k, для $k > 1$. Пусть имеется набор чисел $\{n_i\}$ и множества A_i, D_i, где $i = 1, \dots, k-1$, удовлетворяющие свойствам $(i) - (v)$. Из выбора ε и δ следует, что найдётся число $n_k > n_{k-1}$, такое что $\nu_{n_k}(X \setminus A_{k-1}^\varepsilon) \geqslant \delta$. Т. к. мера ν_{n_k} сепарабельна, то найдётся конечное множество $D_k \subset X \setminus A_{k-1}^\varepsilon$, удовлетворяющее свойству (iv). Т. к. $D_k \cap A_{k-1}^\varepsilon = \emptyset$, то $D_k^{\varepsilon/2} \cap A_{k-1}^{\varepsilon/2} = \emptyset$. По (i) имеем $A_j \subset A_{k-1}$, при $j < k-1$, откуда следует (iii) для случая $i = k$. В силу сепарабельности меры ν_{n_k} найдётся конечное множество F_k такое, что $\nu_{n_k}(X \setminus F_k^{\varepsilon/2}) < \delta/32$. Положим, $A_k = F_k \cup A_{k-1} \cup D_k$, откуда следуют свойства (i) для случая $i = k$, (ii) для случая $j = k$ и (v).

Зададим последовательности вещественных функций $\{\varphi_k\}$ и $\{f_k\}$

$$\varphi_k(x) = \max(1 - \frac{2}{\varepsilon}\rho(x, D_k), 0), \text{где } k = 1, 2, ...$$

$$f_1 = 0, \;\; f_{k+1} = \begin{cases} f_k, & \text{если } |\nu_{n_k}(f_k) - \nu_{n_{k+1}}(f_k)| > \frac{\delta}{8} \\ f_k + \varphi_{k+1}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Из свойств (i)–(iii) следует, что $D_i^{\varepsilon/2} \cap D_j^{\varepsilon/2} = \emptyset$ при $i \neq j$. Таким образом, носители функций $\operatorname{spt}\varphi_k = D_k^{\varepsilon/2}$, $k \in \mathbb{N}$ попарно не пересекаются. Для любого $k \in \mathbb{N}$ и $x \in D_k^{\varepsilon/4}$ имеем $\varphi_k(x) \geqslant 1/2$. Значит, $\nu_{n_k}(\varphi_k) \geqslant \frac{1}{2}\nu_{n_k}(D_k^{\varepsilon/4})$. Применив (iv), получим $\nu_{n_k}(\varphi_k) > \frac{\delta}{4}$. Откуда следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется

$$|\nu_{n_k}(f_k) - \nu_{n_{k+1}}(f_{k+1})| > \delta/8.$$

Определим $f(x) = \sup_k f_k(x)$. Т. к. $0 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant 1$, $\operatorname{Lip}\varphi_k \leqslant 2/\varepsilon$ и носители функций φ_k не пересекаются, то $0 \leqslant f_k \leqslant 1$ и $\operatorname{Lip} f_k \leqslant 2/\varepsilon$ для всех

$k \in \mathbb{N}$, и $0 \leqslant f \leqslant 1$ и $\operatorname{Lip} f \leqslant 2/\varepsilon$. Таким образом, $f \in \operatorname{lip}^\circ(X)$. Для любого натурального k выполняется оценка $0 \leqslant (f - f_k) \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} \varphi_i \leqslant 1$. Следовательно, $\operatorname{spt}(f - f_k) \subset \cup_{i=k+1}^{\infty} D_i^{\varepsilon/2}$. В силу свойства (iii) имеем $\cup_{i=k+1}^{\infty} D_i^{\varepsilon/2} \subset X \setminus A_k^{\varepsilon/2}$ и $|\nu_{n_k}(f - f_k)| \leqslant \nu_{n_k}(X \setminus A_k^{\varepsilon/2}) < \varepsilon/32$. Применяя неравенство треугольника, получаем

$$|\nu_{n_k}(f) - \nu_{n_{k+1}}(f)| \geqslant |\nu_{n_k}(f_k) - \nu_{n_{k+1}}(f_{k+1})| -$$

$$-|\nu_{n_k}(f) - \nu_{n_k}(f_k)| - |\nu_{n_{k+1}}(f) - \nu_{n_{k+1}}(f_{k+1})| > \frac{\delta}{8} - 2\frac{\delta}{32} = \frac{\delta}{16}.$$

Значит, последовательность $\nu_n(f)$ не является фундаментальной. $\square$

Лемма 4.6. *Пусть пространство X полно и пусть последовательность конечных сепарабельных мер $\{\nu_n\}$ такова, что для любой функции $f \in \operatorname{lip}^\circ(X)$ числовая последовательность $\nu_n(f)$ фундаментальна. Тогда существует единственная сепарабельная мера μ, к которой последовательность мер $\{\nu_n\}$ слабо сходится.*

`Доказательство.` Определим на пространстве $\operatorname{lip}^\circ(X)$ неотрицательный линейный функционал μ по формуле $\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(f)$. Рассмотрим последовательность функций $\varphi_k \in \operatorname{lip}^\circ(X)$, монотонно сходящихся к нулю ($\varphi_k \downarrow 0$). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По лемме 4.5 последовательность мер ν_n составляет плотное семейство, значит, найдётся компактное множество K такое, что $\nu_n(X \setminus K) < \varepsilon$. Сходящиеся на компакте функции φ_k сходятся равномерно, следовательно найдется настолько большой номер k_0, что при $k > k_0$ имеем $\max\{\varphi_k(x) : x \in K\} < \varepsilon$ и

$$\nu_n(\varphi_k) = \int_K \varphi_k \, d\nu_n + \int_{X\setminus K} \varphi_1 \, d\nu_n \leqslant \varepsilon \cdot (\nu_n(1) + \max \varphi_1)$$

$$\mu(\varphi_k) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(\varphi_k) \leqslant \varepsilon \cdot (\mu(1) + \max \varphi_1)$$

для всех $k > k_0$. Таким образом, мы получили, что $\mu(\varphi_k) \downarrow 0$ для произвольной последовательности $\varphi_k \downarrow 0$. По теореме Даниэля [11, II.7.1] функционал μ является мерой на X.

Чтобы показать сепарабельность меры μ, достаточно рассмотреть сепарабельное множество $S = \operatorname{cl}(\cup \operatorname{spt} \nu_n)$ и убедиться, что $\mu(S) = \mu(X)$. Используя последовательность липшицевых функций $f_k(x) = \max(1 - k \cdot \rho(S, x), 0)$, монотонно сходящихся всюду на S к характеристической функции χ_S множества S, получаем

$$\mu(S) = \mu(\chi_S) = \lim_{k\to\infty} \mu(f_k) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \nu_n(f_k) = \mu(1) = \mu(X).$$

Применяя следствие 3.4, получаем, что последовательность $\{\nu_n\}$ слабо сходится к сепарабельной мере μ. $\square$

`Доказательство теоремы 4.1.` Рассмотрим произвольную слабо фундаментальную последовательность сепарабельных мер $\{\nu_n\}$, т. е. такую, что для любой функции $f \in C_b(X)$ числовая последовательность $\{\nu_n(f)\}$ фундаментальна. Т. к. $\mathrm{lip}^\circ(X) \subset C_b(X)$, то по лемме 4.6 последовательность $\{\nu_n\}$ слабо сходится к некоторой сепарабельной мере. Значит, пространство сепарабельных мер слабо полно. □

`Доказательство теоремы 4.2.` Пусть последовательность $\{\nu_n\}$ мер из пространства $M(X)$ фундаментальна в метрике H. Из определения метрики H вытекает, что для любой функции $f \in \mathrm{lip}(X)$ последовательность $\nu_n(f)$ фундаментальна. По лемме 4.6 существует сепарабельная мера μ такая, что $\nu_n \Rightarrow \mu$. Покажем, что $H(\nu_n, \mu) \to 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу фундаментальности $\{\nu_n\}$ найдётся такой номер n, что $H(\nu_n, \nu_m) < \varepsilon$, для всех $m > n$. Если $f \in \mathrm{lip}_1(X)$ — некоторая неотрицательная липшицева функция, то последовательность ограниченных функций $f_k(x) = \min\{f(x), k\}$ монотонно сходится $f_k \uparrow f$ на X. По теореме Лебега [12, Гл.1, §12, (12.6), стр.48] $\nu_n(f_k) \uparrow \nu_n(f)$ и $\mu(f_k) \uparrow \mu(f)$, следовательно, найдётся настолько большой номер k, что $|\nu_n(f) - \nu_n(f_k)| < \varepsilon$ и $|\mu(f) - \mu(f_k)| < \varepsilon$. Из слабой сходимости вытекает, что $\lim_{m\to\infty} \nu_m(f_k) = \mu(f_k)$. Из выбора n имеем $|\nu_n(f_k) - \mu(f_k)| = \lim_{m\to\infty} |\nu_n(f_k) - \nu_m(f_k)| \leqslant \varepsilon$. В итоге получаем

$$|\nu_n(f) - \mu(f)| \leqslant |\nu_n(f) - \nu_n(f_k)| + |\nu_n(f_k) - \mu(f_k)| + |\mu(f_k) - \mu(f)| < 3\varepsilon$$

Любая липшицева функция представима в виде разности неотрицательных $f = f^+ - f^-$, следовательно, $\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(f)$ для всех $f \in \mathrm{lip}_1(X)$. Отсюда следует, во-первых, $\mu \in M(X)$, т. к. $\mu(\phi_{x_0}) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(\phi_{x_0}) < \infty$, и, во-вторых, $\lim_{n\to\infty} H(\nu_n, \mu) = 0$, что и доказывает полноту пространства $M(X)$. Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь пространство $M(X)$ полно, покажем полноту X. Рассмотрим некоторую фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ в X. Т. к. $H(\delta_x, \delta_y) = \rho(x, y)$ для всех $x, y \in X$, то последовательность мер Дирака $\{\delta_{x_n}\}$ фундаментальна и в силу полноты $M(X)$ сходится в метрике H к некоторой мере ν. Из сепарабельности меры ν получаем, что её носитель не пуст. Пусть $x_0 \in \mathrm{spt}\,\nu$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Для липшицевой функции $f_\varepsilon(x) = \max(0, 1 - \frac{1}{\varepsilon}\rho(x_0, x))$ имеем $\lim_{n\to\infty} \delta_{x_n}(f) = \nu(f) > 0$. Отсюда получаем, что существует N такое, что для $n > N$ выполнено $\delta_{x_n}(f) = f(x_n) > 0$, значит, $\rho(x_0, x_n) < \varepsilon$. Следовательно, $x_n \to x_0$, при $n \to \infty$. Полнота пространства X доказана. □

5. Приложения теоремы о полноте. Теорема 4.2, как было упомянуто в введении, имеет приложения в теории самоподобных множеств. Например, без её использования некорректно доказательство теоремы

Хатчинсона [3, 4.4(1)] о существовании единственной инвариантной меры на инвариантном множестве. Так как в [3] используются борелевски регулярные внешние меры, то теорему 4.2 необходимо переформулировать в терминах внешних мер.

Внешней мерой на X называется функция $\mu : 2^X \to [0, \infty]$, такая что $\mu(\varnothing) = 0$ и $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ для $E_i \subset X$. Множество A называется *μ-измеримым*, если $\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A)$ для всех $T \subset X$. Говорят, что внешняя мера μ *борелевски регулярна*, если все борелевские множества μ-измеримы и для любого $A \subset X$ существует борелевское множество $B \supset A$, такое что $\mu(A) = \mu(B)$. Будем обозначать $M^*(X)$ пространство всех сепарабельных внешних мер на X, удовлетворяющих $\mu(X) = 1$ и $\int_X \phi_{x_0} \, d\mu < \infty$, для некоторого $x_0 \in X$. Метрика H на $M^*(X)$ также определяется формулой (1).

Теорема 5.1. *Пространство $M^*(X)$ полно в метрике H тогда и только тогда, когда полно пространство X.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 4.2 и следующего предложения:

Предложение 5.2. *Пространство $M^*(X)$, метризованное метрикой H, взаимно однозначно отображается на $M(X)$ с сохранением метрики.*

`Доказательство.` Пусть отображение $F : M^*(X) \to M(X)$ задано формулой $F(\mu) = \mu|_{\mathcal{B}(X)}$. Мера $F(\mu)$ совпадает с μ на борелевских множествах. Из определения интеграла Лебега следует, что интегралы $\int_X f \, d\mu$ и $\int_X f \, dF(\mu)$ совпадают на непрерывных функциях. Следовательно, отображение F сохраняет метрику H. Т. к. борелевски регулярная внешняя мера однозначно определяется своими значениями на борелевских множествах, то F является отображением «в». Для произвольной меры $\nu \in M(X)$ формула $\mu(A) = \inf\{\nu(B) : B \supset A,\, B \in \mathcal{B}(X)\}$ задаёт внешнюю меру на X. Причём мера μ является борелевски регулярной, т. к. по построению, для любого $A \subset X$ найдётся последовательность $B_n \in \mathcal{B}(X)$, $n = 1, 2, \ldots$ такая, что $B_n \supset A$ и $|\mu(A) - \mu(B_n)| < 1/2^n$, откуда следует $B = \cap B_n \in \mathcal{B}(X)$, $B \supset A$ и $\mu(A) = \mu(B)$. Мера μ совпадает с ν на борелевских множествах, следовательно, $\mu \in M^*(X)$ и $F(\mu) = \nu$. Таким образом, F является также отображением «на», а, значит, и взаимно однозначным отображением. $\square$

В работе [1] приводится пример построения мер в $\mathbb{R}^n$, инвариантных относительно счётных систем сжимающих отображений, известных [4] как IIFS (Infinite Iterated Function System). Следующая теорема обобщает данный пример на случай полного метрического пространства.

Теорема 5.3. *В полном метрическом пространстве (X, ρ), для любой* *счётной системы* $\mathbf{S} = \{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *сжимающих отображений* ($S_i : X \to X$, $\operatorname{Lip} S_i < 1$ *для* $i \in \mathbb{N}$) *с неподвижными точками* x_i *и для любого вероятностного вектора* $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots)$ ($\sum_{i\in\mathbb{N}} p_i = 1, p_i \geqslant 0$ *для* $i \in \mathbb{N}$), *удовлетворяющего условию* $\sum_{i\in\mathbb{N}} p_i\rho(x_1, x_i) < \infty$, *существует единственная мера* $\nu \in M(X)$, *такая что*

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i S_i^{-1}(A) \text{ для всех } \nu - \text{измеримых } A \subseteq X$$

Доказательство. Оператор $T : M(X) \to M(X)$, $T(\nu) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \nu S_i^{-1}$ является сжимающим в H метрике [1, 3,Теорема 5]. По теореме 4.2 пространство $M(X)$ полно. Применяя теорему Банаха о неподвижной точке получаем, что существует единственная мера $\nu \in M(X)$ такая, что $T(\nu) = \nu$. $\square$

Мера ν, порождаемая системой $\mathbf{S}$, называется *инвариантной мерой.* Множество, инвариантное относительно системы $\mathbf{S}$, можно определить, как $\operatorname{spt}\nu$. Заметим, что построенные таким образом множества могут быть неограничены, а, следовательно, в отличие от аттракторов IFS, не компактны. Следующий пример показывает также существование инвариантных мер с ограниченным, но не компактным носителем.

Пример 5.1.: На гильбертовом пространстве l_2 с гильбертовым базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ рассмотрим систему $\mathbf{S} = \{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ сжимающих отображений $S_i(x) = \frac{1}{2}(x - e_i) + e_i$ и вероятностный вектор $\mathbf{p} = \left(\frac{1}{2^i}\right)_{i=1}^{\infty}$. Носитель соответствующей инвариантной меры ограничен (лежит в единичном шаре), но не компактен, т. к. содержит $\{e_i\}$ — неподвижные точки отображений $\{S_i\}$.

Результаты работы анонсированы в [8–9].

Выражаю огромную благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. В. В. Асееву за постоянное внимание к данному исследованию и ценные советы по оформлению. Благодарю рецензента за сделанные им замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

Список литературы

[1] Åkerlund-Biström, Cecilia *A generalization of Hutchinson distance and applications.* — Random and Comput. Dyn., 1997, 5, No. 2–3, p. 159–176.

[2] Federer H. *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[3] Hutchinson J. *Fractals and Self Similarity*, Indiana Univ. Math. Journal, Vol. 30, No. 5. (1981), 713–747.

[4] Fernau H *Infinite Iterated Function Systems*, Math. Nachr., 170, 1994, p. 79–91.

[5] Tsuji M. *Potential Theory in modern function theory*, Maruzen Co., LTD, Tokyo, 1959, 590 p.

[6] Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер.* — М.:Наука, 1977, 352 с.

[7] Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* — М.:Наука, 1984, 752 с.

[8] Кравченко А. С. *Полнота пространства мер в метрике Канторовича.* — Четвёртый сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000), посв. памяти М.А.Лаврентьева: Тез. докл. Новисибирск:ИМ СО РАН, 2000, Ч.1, с. 153.

[9] Кравченко А. С. *Полнота пространства вероятностных мер.* — Материалы XXXVII МНСК, Математика. Новосибирск:НГУ, 1999, с. 82.

[10] Кутателадзе С. С. *Основы функционального анализа.* — Новосибирск:Наука, 1983, 221 с.

[11] Невё Ж. *Математические основы теории вероятностей.* — М.:Мир, 1969, 310 с.

[12] Сакс С. *Теория интеграла.* — М.:ИЛ, 1949, 496 с.